Fiche n°3 : Calcul d'incertitude du débit dans un collecteur non circulaire

1. Calcul du débit Q

On considère un point de mesure sur un collecteur où l'on mesure simultanément la hauteur d'eau h (m) et la vitesse d'écoulement moyenne U (m.s^{-1}) à travers la section mouillée S (m^2). On détermine la section mouillée S à partir de la hauteur mesurée h au moyen d'une relation $S(h)$ établie spécifiquement pour le point de mesure considéré. Le débit Q (m^3.s^{-1}) est calculé par la relation

$$Q = S(h)U \qquad \text{eq. 1.1}$$

Dans la plupart des cas, la relation $S(h)$ est un polynôme de degré 1, 2 ou 3 écrit sous la forme générale

$$S(h) = \sum_{j=0}^{m} b_j h^j \qquad \text{eq. 1.2}$$

avec b_j les coefficients du polynôme et m le degré du polynôme.
Dans le cas particulier d'un polynôme de degré $m = 3$, $S(h) = b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + b_3 h^3$.

2. Incertitude sur le débit Q

On fait les hypothèses suivantes :

- tous les capteurs sont correctement étalonnés et périodiquement vérifiés.
- les erreurs systématiques éventuelles sont corrigées. Seules les erreurs aléatoires sont prises en compte dans les calculs qui suivent. On suppose qu'elles suivent des lois normales.
- la section du collecteur est réellement la section prévue : il n'y a ni dépôts, ni sédimentation, ni déformation.
- on néglige les incertitudes sur les sections mesurées *S*.

Dans ce cas, en appliquant la loi de propagation des incertitudes au débit

$$Q = U \sum_{j=0}^{m} b_j h^j \qquad \text{eq. 2.1}$$

l'incertitude type $u(Q)$ est calculée par la relation

$$u(Q)^2 = u(U)^2 \left(\frac{\partial Q}{\partial U}\right)^2 + u(h)^2 \left(\frac{\partial Q}{\partial h}\right)^2 + \sum_{j=0}^{m} u(b_j)^2 \left(\frac{\partial Q}{\partial b_j}\right)^2 + 2 \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=j+1}^{m} \mathrm{cov}(b_j, b_k) \left(\frac{\partial Q}{\partial b_j}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial b_k}\right) \qquad \text{eq. 2.2}$$

avec

$u(U)$	l'incertitude type sur la vitesse (m.s^{-1})
$u(b_j)$	les incertitudes types sur les coefficients b_j
$\mathrm{cov}\,(b_j, b_k)$	les covariances des coefficients b_j.

Seules sont prises en compte les covariances entre les coefficients b_j.

L'établissement de la relation $S(h)$ et le calcul des valeurs $u(b_j)$ et $\mathrm{cov}(b_j, b_k)$ sont présentés au paragraphe 3. Un exemple complet d'application est détaillé au paragraphe 4.

3. Relation $S(h)$ et incertitudes associées

On établit la relation $S(h)$ par la méthode des moindres carrés ordinaires à partir de n couples de points (h_i, S_i) expérimentaux, obtenus par un relevé *in situ* ou, à défaut, sur plan (compte tenu des nombreuses différences observées entre plans et réalité, un récolement effectué *in situ* par un géomètre est toujours préférable).

La méthode des moindres carrés ordinaires est disponible sur de nombreux logiciels du commerce (par exemple Excel, TableCurve, etc.), et permet d'obtenir les valeurs des coefficients b_j et de leurs incertitudes types $u(b_j)$. Cependant, la plupart de ces logiciels commerciaux ne fournissent pas les valeurs des covariances $\mathrm{cov}(b_j,\ b_k)$ indispensables pour le calcul des incertitudes. Nous détaillons dans ce paragraphe les calculs nécessaires : ils sont programmés dans le code Matlab UQSU (code de démonstration).

La méthode des moindres carrés ordinaires consiste à rechercher la relation $S(h)$ qui approxime au mieux les *n* couples de points (h_i, S_i), en minimisant l'écart

$$E = \sum_{i=1}^{n}\left(S(h_i) - S_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m} b_j h_i^{\,j} - S_i\right)^2 \qquad \text{eq. 3.1}$$

L'écart E est minimum lorsque $\dfrac{\partial E}{\partial b_j} = 0 \quad \forall\, j = 0{:}m$

Cela revient à résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & h_1 & h_1^{\,2} & \cdots & h_1^{\,m} \\ 1 & h_2 & h_2^{\,2} & \cdots & h_2^{\,m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & h_n & h_n^{\,2} & \cdots & h_n^{\,m} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{vmatrix} \qquad \text{eq. 3.2}$$

Sous forme matricielle, ce système s'écrit

$$\boldsymbol{Fb} = \boldsymbol{S} \qquad \text{eq. 3.3}$$

Les étapes de calcul sont les suivantes :

On procède à une décomposition QR de la matrice $\boldsymbol{F}$ qui est remplacée par le produit de 2 matrices $\boldsymbol{Q}$ et $\boldsymbol{R}$, ce qui permet d'écrire le système à résoudre sous la forme :

$$\boldsymbol{QRb} = \boldsymbol{S} \qquad \text{eq. 3.4}$$

Cette décomposition QR est nécessaire pour déterminer correctement les valeurs des covariances.
On procède ensuite aux calculs suivants :

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{Q}^T \qquad \text{eq. 3.5}$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{MS} \qquad \text{eq. 3.6}$$

On calcule les résidus $\boldsymbol{e}$ par la relation

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{Fb} - \boldsymbol{S} \qquad \text{eq. 3.7}$$

La somme des carrés des résidus S_r est calculée par la relation

$$S_r = \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{e} \qquad \text{eq. 3.8}$$

La matrice de covariance $\boldsymbol{C}$ est calculée par la relation

$$\boldsymbol{C} = \frac{S_r}{n-m-1}\boldsymbol{MM}^T \qquad \text{eq. 3.9}$$

La matrice $\boldsymbol{C}$ donne directement toutes les valeurs $u(b_j)$ et $\mathrm{cov}(b_j,\ b_k)$ nécessaires aux calculs ultérieurs :

$$\boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} u(b_1)^2 & \mathrm{cov}(b_1,b_2) & \cdots & \mathrm{cov}(b_1,b_m) \\ \mathrm{cov}(b_2,b_1) & u(b_2)^2 & \cdots & \mathrm{cov}(b_2,b_m) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{cov}(b_m,b_1) & \mathrm{cov}(b_m,b_2) & \cdots & u(b_m)^2 \end{vmatrix} \qquad \text{eq. 3.10}$$

4. EXEMPLE D'APPLICATION

On prend comme exemple d'application un collecteur type 064 à banquette dont les caractéristiques sont données Tableau 4.1 et Figure 4.1. Les points $(h_i,\ S_i)$ sont représentés Figure 4.2 : on observe une rupture de pente significative pour $h = 1.2$ m. Nous proposons donc d'établir la fonction $S(h)$ en deux parties : une partie pour $h \leq 1.2$ m, l'autre partie pour $h \geq 1.2$ m.

hi (m)	Si (m2)
0	0
0.20	0.20
0.40	0.47
0.60	0.76
0.80	1.07
1.00	1.39
1.20	1.72
1.40	2.15
1.60	2.64
1.80	3.15
2.00	3.66
2.20	4.18
2.40	4.69
2.60	5.20
2.80	5.68
3.00	6.14
3.20	6.54
3.40	6.85
3.59	7.01

Tableau 4.1 : couples de valeurs $(h_i,\ S_i)$ pour le collecteur type 064 à banquette

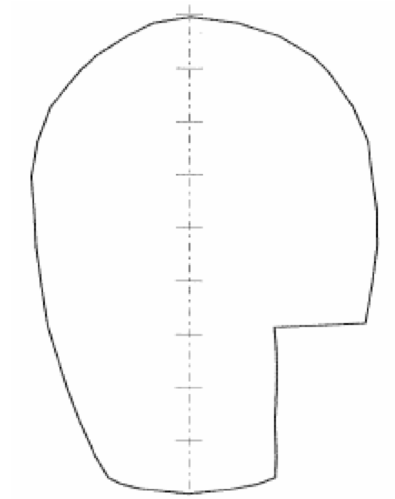

Figure 4.1 : section du collecteur type 064 à banquette

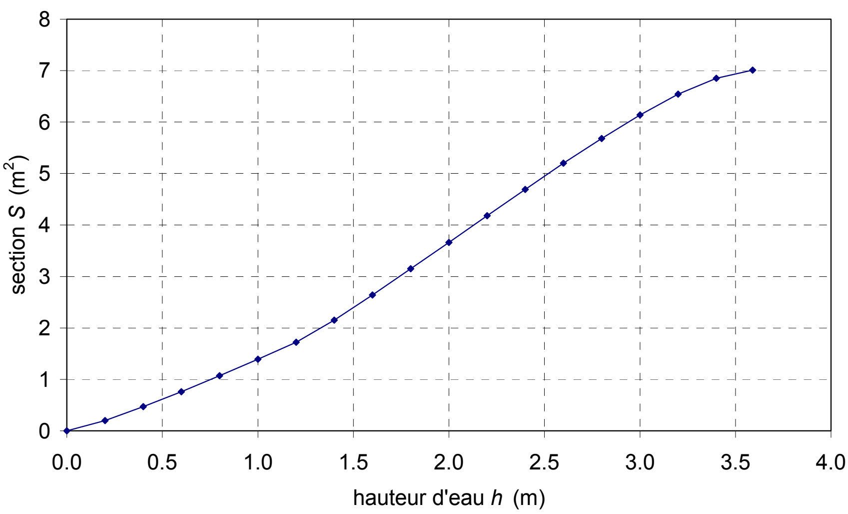

Figure 4.2 : tracé des couples de valeurs $(h_i,\ S_i)$ pour le collecteur type 064 à banquette

Pour la suite des calculs, on considèrera deux cas :

variable	1er cas	2ème cas
h (m)	0.8	1.6
$u(h)$ (m)	0.0075	0.0100
U (m.s^{-1})	0.4	0.90
$u(U)$ (m.s^{-1})	0.05	0.05

4.1 *Relation $S_1(h)$ pour $h \leq 1.2$ m*

On impose que $S_1 = 0$ pour $h = 0$ (donc $b_0 = 0$). Dans ce cas, la première colonne de la matrice $\boldsymbol{F}$, composée de valeurs toutes égales à 1, est supprimée dans l'eq. 3.2 et on a

$$\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.200 & 0.040 & 0.008 \\ 0.400 & 0.160 & 0.064 \\ 0.600 & 0.360 & 0.216 \\ 0.800 & 0.640 & 0.512 \\ 1.000 & 1.000 & 1.000 \\ 1.200 & 1.440 & 1.728 \end{vmatrix} \qquad \text{eq. 4.1}$$

On obtient

$$\boldsymbol{b}_1 = \begin{vmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ b_{13} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.9064 \\ 0.7431 \\ -0.2546 \end{vmatrix} \qquad \text{eq. 4.2}$$

On calcule $S_1(h)$ par la relation

$$S_1(h) = \boldsymbol{h}^T \boldsymbol{b}_1 \qquad \text{eq. 4.3}$$

avec

$$\boldsymbol{h} = \begin{vmatrix} h \\ h^2 \\ h^3 \end{vmatrix} \qquad \text{eq. 4.4}$$

ce qui s'écrit aussi de manière classique

$$S_1(h) = b_{11}h + b_{12}h^2 + b_{13}h^3 = 0.9064\, h + 0.7431\, h^2 - 0.2546\, h^3 \qquad \text{eq. 4.5}$$

On obtient également
$S_{r1} = 1.460317 \times 10^{-4}$
et

$$\boldsymbol{C}_1 = \begin{vmatrix} u(b_{11})^2 & \text{cov}(b_{11}, b_{12}) & \text{cov}(b_{11}, b_{13}) \\ \text{cov}(b_{12}, b_{11}) & u(b_{12})^2 & \text{cov}(b_{12}, b_{13}) \\ \text{cov}(b_{13}, b_{11}) & \text{cov}(b_{13}, b_{12}) & u(b_{13})^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.001455 & -0.003437 & 0.001889 \\ -0.003437 & 0.008632 & -0.004930 \\ 0.001889 & -0.004930 & 0.002889 \end{vmatrix} \qquad \text{eq. 4.6}$$

Pour $h = 1.2$ m, $S_1(1.2) = 1.717698$ m^2.

4.2 Relation $S_2(h)$ pour $h \geq 1.2$ m

La matrice $\boldsymbol{F}$ est composée de la manière suivante :

$$\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} 1 & 1.200 & 1.444 & 1.728 \\ 1 & 1.400 & 1.960 & 2.744 \\ 1 & 1.600 & 2.560 & 4.096 \\ 1 & 1.800 & 3.240 & 5.832 \\ 1 & 2.000 & 4.000 & 8.000 \\ 1 & 2.200 & 4.840 & 10.648 \\ 1 & 2.400 & 5.760 & 13.824 \\ 1 & 2.600 & 6.760 & 17.576 \\ 1 & 2.800 & 7.840 & 21.952 \\ 1 & 3.000 & 9.000 & 27.000 \\ 1 & 3.200 & 10.240 & 32.768 \\ 1 & 3.400 & 11.560 & 39.304 \\ 1 & 3.590 & 12.881 & 46.268 \end{vmatrix} \qquad \text{eq. 4.7}$$

On obtient

$$\boldsymbol{b}_2 = \begin{vmatrix} b_{20} \\ b_{21} \\ b_{22} \\ b_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.8365 \\ -0.8837 \\ 1.6723 \\ -0.2631 \end{vmatrix} \qquad \text{eq. 4.8}$$

On calcule $S_2(h)$ par la relation

$$S_2(h) = \boldsymbol{h}^T \boldsymbol{b}_2 \qquad \text{eq. 4.9}$$

avec

$$\boldsymbol{h} = \begin{vmatrix} 1 \\ h \\ h^2 \\ h^3 \end{vmatrix} \qquad \text{eq. 4.10}$$

ce qui s'écrit aussi de manière classique

$$S_2(h) = b_{20} + b_{21}h + b_{22}h^2 + b_{23}h^3 = 0.8365 - 0.8837\,h + 1.6723\,h^2 - 0.2631\,h^3 \qquad \text{eq. 4.11}$$

On obtient également
$S_{r2} = 0.004624$
et

$$\boldsymbol{C}_2 = \begin{vmatrix} u(b_{20})^2 & \mathrm{cov}(b_{20},b_{21}) & \mathrm{cov}(b_{20},b_{22}) & \mathrm{cov}(b_{20},b_{23}) \\ \mathrm{cov}(b_{21},b_{20}) & u(b_{21})^2 & \mathrm{cov}(b_{21},b_{22}) & \mathrm{cov}(b_{21},b_{23}) \\ \mathrm{cov}(b_{22},b_{20}) & \mathrm{cov}(b_{22},b_{21}) & u(b_{22})^2 & \mathrm{cov}(b_{22},b_{23}) \\ \mathrm{cov}(b_{23},b_{20}) & \mathrm{cov}(b_{23},b_{21}) & \mathrm{cov}(b_{23},b_{22}) & u(b_{23})^2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 0.056570 & -0.078058 & 0.033555 & -0.004551 \\ -0.078058 & 0.109187 & -0.047461 & 0.006495 \\ 0.033555 & -0.047461 & 0.020842 & -0.002877 \\ -0.004551 & 0.006495 & -0.002877 & 0.000400 \end{vmatrix} \qquad \text{eq. 4.12}$$

Pour $h = 1.2$ m, $S_2(1.2) = 1.729573$ m^2.

En première approximation, on peut admettre que $S_1(1.2) \approx S_2(1.2)$. Pour améliorer cette approximation, deux solutions sont envisageables. La première consiste à chercher la valeur h^* telle que $S_1(h^*) = S_2(h^*)$

et à utiliser ensuite cette valeur h^* en remplacement de $h = 1.2$ m pour la définition des segments de $S(h)$. La deuxième solution consiste à imposer que $S_2(h)$ passe par le point de coordonnée $(1.2, S_1(1.2))$: il faut pour cela utiliser les moindres carrés pondérés.

Dans cet exemple, nous appliquerons la première solution. On cherche la valeur h^* telle que

$$S_1(h^*) - S_2(h^*) = 0 \qquad \text{eq. 4.13}$$

On procède par itérations en partant de $h^*_0 = 1.2$ m et en utilisant `fsolve` sous Matlab (ou le Solveur sous Excel) : `[hstar,fval]=fsolve(@(x)[x; x^2; x^3]'*b1-[1;x;x^2;x^3]'*b2, x0).`
On trouve h^* = 1.168 m.

On utilisera donc la relation $S(h)$ suivante :
si $h \in [0, h^*]$ $\quad S(h) = S_1(h)$
si $h > h^*$ $\quad S(h) = S_2(h)$.

4.3 *Calcul de l'incertitude u(Q)*

L'incertitude $u(Q)$ est due aux incertitudes sur U, sur h et sur les coefficients b_j :

$$u(Q)^2 = \underbrace{u(U)^2\left(\frac{\partial Q}{\partial U}\right)^2}_{} + \underbrace{u(h)^2\left(\frac{\partial Q}{\partial h}\right)^2}_{} + \underbrace{\sum_{j=0}^{m} u(b_j)^2\left(\frac{\partial Q}{\partial b_j}\right)^2 + 2\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=j+1}^{m}\mathrm{cov}(b_j,b_k)\left(\frac{\partial Q}{\partial b_j}\right)\left(\frac{\partial Q}{\partial b_k}\right)}_{} \qquad \text{eq. 2.2}$$

$$= \quad u_1(Q)^2 \quad + \quad u_2(Q)^2 \quad + \quad u_3(Q)^2$$

Pour simplifier les notations, on considère $S(h)$ sous la forme générale d'un polynôme de degré 3.

Pour le terme $u_1(Q)$, on a

$$\frac{\partial Q}{\partial U} = S(h) = b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + b_3 h^3 \qquad \text{eq. 4.14}$$

donc

$$u_1(Q)^2 = u(U)^2 (S(h))^2 = u(U)^2 \left(b_0 + b_1 h + b_2 h^2 + b_3 h^3\right)^2 \qquad \text{eq. 4.15}$$

Pour le terme $u_2(Q)$, on a

$$\frac{\partial Q}{\partial h} = U\frac{dS(h)}{dh} = U\left(b_1 + 2b_2 h + 3b_3 h^2\right) \qquad \text{eq. 4.16}$$

donc

$$u_2(Q)^2 = u(h)^2 U^2 \left(b_1 + 2b_2 h + 3b_3 h^2\right)^2 \qquad \text{eq. 4.17}$$

Pour le terme $u_3(Q)$, on prend pour $u(b_j)$ et $\mathrm{cov}(b_j, b_k)$ les valeurs données dans la matrice $\boldsymbol{C}$. Le terme $u_3(Q)$ correspond à l'incertitude type liée à la régression. On a les termes suivants :

$$\frac{\partial Q}{\partial b_0} = 1 \text{ si } b_0 \neq 0,\ \frac{\partial Q}{\partial b_0} = 0 \text{ si } b_0 = 0,\ \frac{\partial Q}{\partial b_1} = h,\ \frac{\partial Q}{\partial b_2} = h^2 \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial b_3} = h^3 \qquad \text{eq. 4.18}$$

donc

$$\begin{aligned} u_3(Q)^2 &= u(b_0)^2 + u(b_1)^2 h^2 + u(b_2)^2 h^4 + u(b_3)^2 h^6 + 2\,\mathrm{cov}(b_0,b_1)h + 2\,\mathrm{cov}(b_0,b_2)h^2 \\ &\quad + 2\,\mathrm{cov}(b_0,b_3)h^3 + 2\,\mathrm{cov}(b_1,b_2)h^3 + 2\,\mathrm{cov}(b_1,b_3)h^4 + 2\,\mathrm{cov}(b_2,b_3)h^5 \end{aligned} \qquad \text{eq. 4.19}$$

Numériquement, on obtient $u_3(Q)^2 = 21.9909$ e-6 pour le cas $h = 0.8$ m.
Mais, sous forme matricielle, on peut écrire plus directement

$$u_3(Q)^2 = \frac{S_r}{n-m-1}\left(\boldsymbol{h}^T \times \boldsymbol{MM}^T \times \boldsymbol{h}\right) \qquad \text{eq. 4.20}$$

avec $\boldsymbol{h} = \begin{vmatrix} h \\ h^2 \\ h^3 \end{vmatrix}$ pour le cas $h = 0.8$ m ou $\boldsymbol{h} = \begin{vmatrix} 1 \\ h \\ h^2 \\ h^3 \end{vmatrix}$ pour le cas $h = 1.6$ m.

Numériquement, on obtient $u_3(Q)^2{}_{\text{bis}} = 21.9909$ e-6 pour le cas $h = 0.8$ m.

4.4 *Résultats numériques*

Les résultats numériques sont indiqués ci-dessous. Dans le premier cas, $h = 0.8 < h^*$: on applique $S_1(h)$. Dans le deuxième cas, $h = 1.6 > h^*$: on applique $S_2(h)$.

variable	1er cas	2ème cas
h (m)	0.8	1.6
$u(h)$ (m)	0.0075	0.0100
U (ms-1)	0.4	0.90
$u(U)$ (ms-1)	0.05	0.05
$S(h)$ (m2)	1.0703	2.6260
Q (m3s-1)	0.4281	2.3634
$u_1(Q)^2$ (m6s-2)	2.8639 e-3	17.2395 e-3
$u_2(Q)^2$ (m6s-2)	23.2251 e-6	484.9425 e-6
$u_3(Q)^2$ (m6s-2)	21.9909 e-6	118.6349 e-6
$u_3(Q)^2{}_{\text{bis}}$ (m6s-2)	21.9909 e-6	118.6349 e-6
$u(Q)$ (m3s-1)	53.9367 e-3	0.13358
$\Delta Q/Q = 2u(Q)/Q$ (%)	25.2	11.3

4.5 *Note*

On a considéré dans les calculs précédents que les valeurs mesurées S_i pour les différentes hauteurs h_i n'avaient pas d'incertitude, ce qui n'est pas exact mais est acceptable dans de nombreux cas. Si les valeurs S_i pour les différentes hauteurs h_i sont elles-mêmes affectées d'incertitudes, un calcul plus élaboré est nécessaire (méthodes des moindres carrés pondérés ou régression de type Williamson).

4.6 *Annexe : code du programme UQSU sous Matlab*

```
% programme provisoire de démo UQSU
% JLBK, 12 février 2008 pour le Groupe Autosurveillance GRAIE
clear p2 yi n m F Q R M b e Sr C;
format short eng;
% lecture données (hi, Si)
disp(' Nom du fichier .csv contenant les données (hi, Si)');
disp(' (ne pas écrire l''extension): ');
NomFichier = input(' ','s');
Origine = input(' Passage du polynôme par l''origine ? o/n : ', 's');
p2=dlmread([NomFichier,'.csv'],';',1,0);
yi = p2(:,2);
n = size(p2,1);
m = 3;
% construction matrice F
if Origine == 'o'
F(:,1)=p2(:,1);
F(:,2)=p2(:,1).^2;
F(:,3)=p2(:,1).^3;
else
F(1:size(p2,1),1)=ones;
F(:,2)=p2(:,1);
F(:,3)=p2(:,1).^2;
F(:,4)=p2(:,1).^3;
end
% décomposition QR de F
```

```
[Q,R]=qr(F,0);
M=inv(R)*Q';
b=M*yi;
disp(' ');
disp('b = ');
disp(num2str(b));
disp(' ');
% calcul des résidus
e=F*b-yi;
% calcul de la somme des carrés des résidus
Sr = e'*e;
disp('Sr = ');
disp(num2str(Sr));
disp(' ');
% matrice variance/covariances
C=Sr/(n-m-1)*M*M';
disp('C = ');
disp(num2str(C));
disp(' ');
% calculs de S, Q et u(Q)
d = [1 1 1 1 ];
while d(1) > 0
disp(['valeurs de [h u(h) U u(U)] entre crochets pour le calcul ?' ;
      '(pour arrêter: taper 0 (zéro) pour h)                      ']);
disp(' ');
d = input('');
if d(1) > 0
h = d(1); U = d(3);
if Origine == 'o'
    vh = [h; h^2; h^3];
else
    vh = [1; h; h^2; h^3];
end
S = vh'*b;
Q = S*U;
u1Q2 = d(4)^2*S^2;
if Origine == 'o'
    u2Q2 = d(2)^2*U^2*(b(1)+2*b(2)*h+3*b(3)*h^2)^2;
else
    u2Q2 = d(2)^2*U^2*(b(2)+2*b(3)*h+3*b(4)*h^2)^2;
end
u3Q2 = Sr/(n-m-1)*vh'*M*M'*vh;
uQ = sqrt(u1Q2+u2Q2+u3Q2);
DQsurQ = 2*uQ/Q*100;
disp(' ');
disp(['section mouillée S (m2) :                ',num2str(S)]);
disp(['débit (m3/s) :                           ',num2str(Q)]);
disp(['incertitude type u(Q) (m3/s) :           ',num2str(uQ)]);
disp(['incertitude relative élargie (%) :       ',num2str(DQsurQ)]);
disp(['contributions u(U), u(h) et u(S) en % :  ',...
         num2str(100*u1Q2/uQ^2),' , ',num2str(100*u2Q2/uQ^2),' ,
',num2str(100*u3Q2/uQ^2)]);
disp(' ');
end
end
disp fin
```